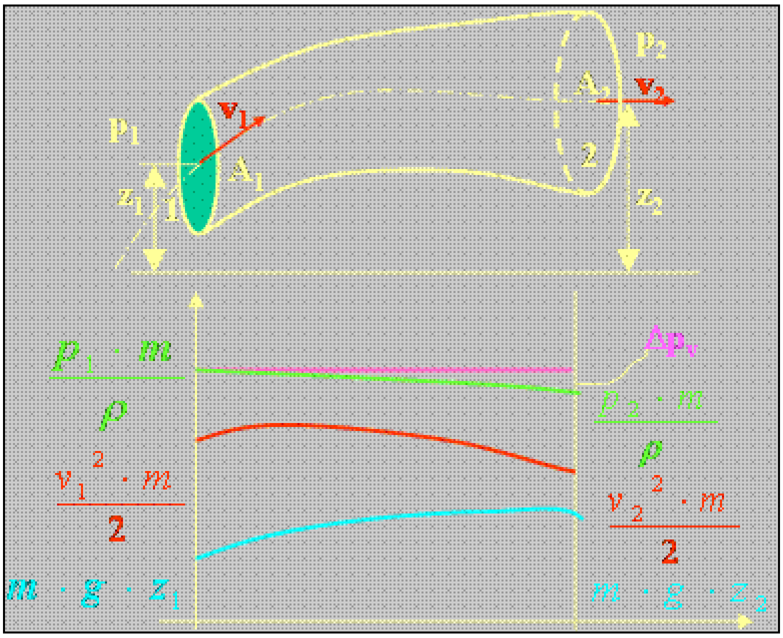
10. Valóságos folyadékok áramlása

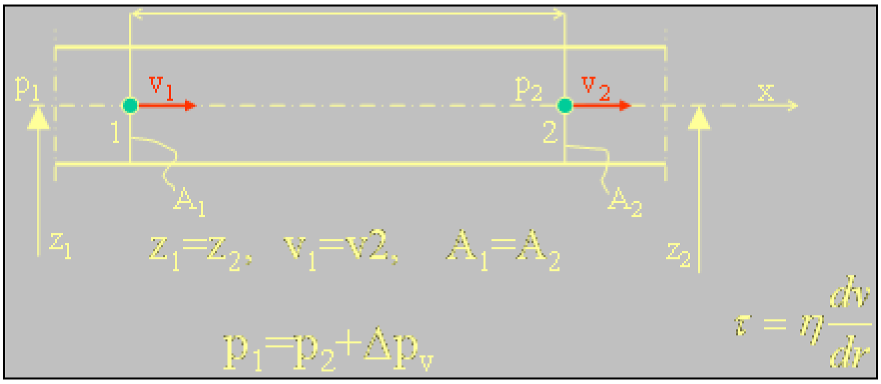
10.1. Bernoulli egyenlet valóságos folyadékoknál

Valóságos folyadéknál a súrlódás miatt veszteség keletkezik, melyet Δp_v veszünk figyelembe.

$$\frac{v_1^2}{2}\cdot\rho + p_1 + \rho\cdot g\cdot z_1 = \frac{v_2^2}{2}\cdot\rho + p_2 + \rho\cdot g\cdot z_2 + \Delta p_v$$

Ábrázolva az energiákat az energia megmaradás alapján a hasznos energia csökken:





$z_1 = z_2$ és $A_1 = A_2$ speciális helyzetben csak a nyomási energia módosulhat

A nyomásveszteség a folyadék mozgási energiájával arányos $\Delta p_v = \zeta \frac{v^2}{2} \cdot \rho$

Körkeresztmetszetű cső esetén: $\zeta \approx \frac{L}{d}$ ➔ $\zeta = \lambda \frac{L}{d}$ ahol λ=csősúrlódási tényező

$$\Delta p_v = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \rho$$

10.1. Newtoni folyadékok áramlása

Navier-Stokes egyenlet *x* irányban:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} + \upsilon \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

A Navier - Stokes egyenlet meghatározásánál említettem hogy, analitikus megoldása ismeretlen (nem integrálható).

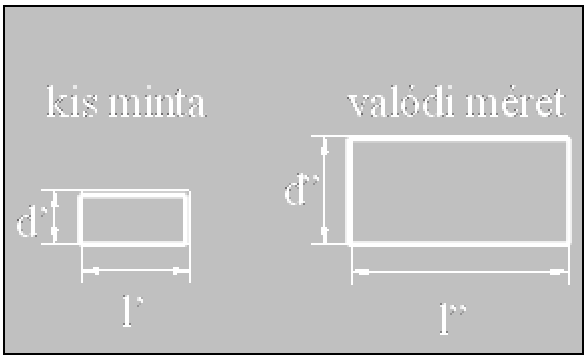
Az előzőekben vázolt egyszerű esetek kivételével lehetetlen a numerikus megoldás.
Ugyanakkor a műszaki feladatok megkövetelik, az összetett erők (külső és belső) hatására kialakuló áramlások leírását. Mi a hasonlósági elméletet használjuk fel a megoldás érdekében.

10.2. Navier-Stokes egyenlet megoldása hasonlósági elmélettel

Megoldás eszköze: modell kísérletek
Eredmény: hasonlósági törvények megalkotása
Eredmény lényege : a valóságos folyamat matematikai leírása = a modell matematikai leírásával

10.2.1. Hasonlóság feltételei

1. Leíró differenciál egyenlet azonossága tartalomra és alakra. (Két áramlás csak akkor hasonló, ha bennük azonos fizikai jelenségek játszódnak le.)
2. Egyértelmûségi feltételek
   a. Geometriai hasonlóság



$C_l = \frac{l''}{l'} = \frac{d''}{d'}$ hasonlósági állandók (hasonlósági szimplexe

   b. Fizikai jellemzők hasonlósága (nagyság, irány, helyzet, közeg minősége stb.)

$$C_v = \frac{v''}{v'}$$

$$\rho, v, p, g$$

c. Időbeli hasonlóság ($C_t = \dfrac{t''}{t'}$,Stacioner áramlásnál nem kell vizsgálni)

d. Határfeltételek (peremfeltételek) hasonlósága (Kezdeti és határfeltételek hasonlósága.) pl. a sebességeloszlás a csőben, a minta és a valóságos objektumnál hasonló legyen. (matematikai magyarázat: két differenciálegyenlet megoldása csak azonos kezdeti és peremfeltételek esetén azonos)

10.2.2. Hasonlóság törvényei

Első hasolósági törvény

a. A meghatározott módon képzett hasonlóság indikátorok az egységgel egyenlők.

$$\frac{C_l \cdot C_v}{C_\nu} = 1$$

A hasonlósági idikátorok képezhetők differenciál egyenletek megoldásával vagy dimenzióanalízissel. Mi a megoldáshoz az első lehetőséget választjuk.

b. Az első törvény más megfogalmazásban is leírható.

A hasonlósági kritériumok egymással egyenlők.

$$\frac{\frac{l''}{l'} \cdot \frac{v''}{v'}}{\frac{\nu''}{\nu'}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{l'' \cdot v''}{\nu''} = \frac{l' \cdot v'}{\nu''} = \pi$$

Második hasonlóság törvény

Buckingham megfogalmazásában: a differenciál egyenletek megoldása hasonlósági kritériumnak függvényeként írható le.

$$\pi_1 = f\left(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n\right) \text{ ill.}$$

$$f\left(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n\right) = 0$$

➔ kritériális egyenletek

Áramlástani kritériális egyenletek kifejezhetők hatványfüggvényként:

$$\pi_1^a \cdot \pi_2^b \cdot \pi_3^c \cdot \ldots \cdot \pi_n^m = \text{állandó}$$

$$\text{Pl.: } Eu = K \cdot Re^a \cdot Fr^b \cdot \left(\frac{l}{d}\right)$$

Harmadik hasonlóság törvény

Áramlástani hasonlóságot öt alapkritérium azonossága biztosítja: Eu, Re, Fr, Ca, We

Eu: Euler
Re: Reynolds
Fr: Froude
Ca: Cauchi
We: Weber

Az alapkritériumokból számos származtatott kritérium is képezhető.

10.2.3. Áramlástani hasonlóság, hasonlósági kritériumok

A hasonlósági állandók segítségével a vizsgált modell egyenletét kifejezzük a modell egyenletével.

A modell differenciál egyenlete:

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t'}+\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\cdot v'_x+\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\cdot v'_y+\frac{\partial v'_x}{\partial z'}\cdot v'_z+\frac{1}{\rho'}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x'}+g'_x-\upsilon'\left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2}\right)=0$$

Valódi objektum áramlásának differenciál egyenlete:

$$\frac{\partial v''_x}{\partial t''}+\frac{\partial v''_x}{\partial x''}\cdot v''_x+\frac{\partial v''_x}{\partial y''}\cdot v''_y+\frac{\partial v''_x}{\partial z''}\cdot v''_z+\frac{1}{\rho''}\cdot\frac{\partial p''}{\partial x''}+g''_x-\upsilon''\left(\frac{\partial^2 v''_x}{\partial x''^2}+\frac{\partial^2 v''_x}{\partial y''^2}+\frac{\partial^2 v''_x}{\partial z''^2}\right)=0$$

A) Geometriai hasonlóság

$$\frac{x''}{x'}=\frac{y''}{y'}=\frac{z''}{z'}=C_l \rightarrow \quad x''=C_l\cdot x' \;;\; y''=C_l\cdot y' \;;\; z''=C_l\cdot z'$$

b) Fizikai mennyiségek hasonlósága

$$\frac{v''_x}{v'_x}=\frac{v''_y}{v'_y}=\frac{v''_z}{v'_z}=C_v \rightarrow v''_x=C_v\cdot v'_x \;;$$

$$v''_y=C_v\cdot v'_y \;;$$

$$v''_z=C_v\cdot v'_z \;;$$

$$\frac{t''}{t'}=C_t \rightarrow t''=C_t\cdot t' \;;$$

$$\frac{\rho''}{\rho'}=C_\rho \rightarrow \rho''=C_\rho\cdot \rho' \;;$$

$$\frac{p''}{p'}=C_p \rightarrow p''=C_p\cdot p' \;;$$

$$\frac{g''}{g'}=C_g \rightarrow g''=C_g\cdot g' \;;$$

$$\frac{\upsilon''}{\upsilon'}=C_\upsilon \rightarrow \upsilon''=C_\upsilon\cdot \upsilon' \;;$$

Valóságos rendszerbe helyettesítve az állandókat azok kiemelhetők:

$$\frac{C_v}{C_t}\cdot\frac{\partial v'_x}{\partial t'}+\frac{C_v^{\,2}}{C_l}\cdot\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\cdot v'_x+\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\cdot v'_y+\frac{\partial v'_x}{\partial z'}\cdot v'_z\right)+\frac{C_p}{C_\rho\cdot C_l}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p'}{\partial x'}+C_g\cdot g'_x-$$

$$C_\nu\cdot\frac{C_v}{C_l^{2}}\cdot\nu'\cdot\left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2}\right)=0$$

Modell differenciál egyenletével összehasonlítva megállapíthatjuk hogy, a modell és a valódi objektum differenciál egyenlete csak akkor azonos, ha az állandók egymással egyenlők.

$$\frac{C_v}{C_t}=\frac{C_v^{\,2}}{C_l}=\frac{C_p}{C_\rho\cdot C_l}=C_g=C_\nu\cdot\frac{C_v}{C_l^{2}}$$

Az első hasonlósági törvény a pontja szerint a megfelelően képzett hasonlősági indikátorok az egységgel egyenlők.

Az erők viszonyítása alapján képzett indikátorok (dinamikai értelmezés):

$$f_l\frac{\square}{\square}\quad\frac{f_k}{f_l}\qquad\frac{C_v^{\,2}}{C_l}=\frac{C_v}{C_t}\qquad\rightarrow\qquad\frac{C_v\cdot C_t}{C_l}=1$$

$$f_g\frac{\square}{\square}\quad\frac{f_k}{f_g}\qquad\frac{C_v^{\,2}}{C_l}=C_g\qquad\rightarrow\qquad\frac{C_v^{\,2}}{C_l\cdot C_g}=1$$

$$f_s\frac{\square}{\square}\quad\frac{f_k}{f_s}\qquad\frac{C_v^{\,2}}{C_l}=C_\nu\cdot\frac{C_v}{C_l^{2}}\rightarrow\frac{C_v\cdot C_l}{C_\nu}=1$$

$$f_p\frac{\square}{\square}\quad\frac{f_p}{f_k}\qquad\frac{C_v^{\,2}}{C_l}=\frac{C_p}{C_\rho\cdot C_l}\rightarrow\quad\frac{C_p}{C_\rho\cdot C_v^{\,2}}=1$$

Az első hasonlósági törvény b pontja szerint a hasonlósági kritériumok egymással egyenlők:

1. hasonlósági kritérium:

$$\frac{C_v\cdot C_t}{C_l}=\frac{\frac{v''}{v'}\cdot\frac{t''}{t'}}{\frac{l''}{l'}}\rightarrow\frac{v''\cdot t''}{l''}=\frac{v'\cdot t'}{l'}=\frac{v\cdot t}{l}$$

Homokron - szám = egyidejűségi szám: $\boxed{H_0=\frac{v\cdot t}{l}}$

Reciprok a Strouhal – szám: $\boxed{Str=\frac{1}{H_0}=\frac{l}{v\cdot t}}$

2. hasonlósági kritérium:

$$2.\ \frac{C_p}{C_\rho\cdot C_v^{\,2}}=\frac{\frac{\Delta p''}{\Delta p'}}{\frac{\rho''}{\rho'}\cdot\frac{v''^2}{v'^2}}\quad\rightarrow\quad\frac{\Delta p''}{\rho''\cdot v''^2}=\frac{\Delta p'}{\rho'\cdot v'^2}=\frac{\Delta p}{\rho\cdot v^2}$$

Kezdetben asz Euler-szám: $\frac{\Delta p}{\rho\cdot v^2}=\text{áll.}\quad /\cdot 2$

Az áramlástani gyakorlatban: $$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot \frac{v^2}{2}}$$

ahol, $[\rho] \cdot \frac{[v^2]}{2} = \frac{Nm}{m^3}$ egységnyi térfogatú folyadék mozgási energiája

3. hasonlósági kritérium: $$\frac{C_v^{\,2}}{C_l \cdot C_g} = \frac{\frac{v''^2}{v'^2}}{\frac{l''}{l'} \cdot \frac{g''}{g'}} \rightarrow \frac{v''^2}{l'' \cdot g''} = \frac{v'^2}{l' \cdot g'} = \frac{v^2}{l \cdot g}$$

Kezdetben: $\frac{v^2}{l \cdot g} = áll. \quad / \sqrt{\ }$

Froude-szám a gyakorlatban: $\boxed{Fr = \frac{v}{\sqrt{l \cdot g}}}$

***l* =** áramlás szempontjából jellemzõ méret

4.hasonlósági kritérium: $$\frac{C_v \cdot C_l}{C_\upsilon} = \frac{\frac{v''}{v'} \cdot \frac{l''}{l'}}{\frac{\upsilon''}{\upsilon'}} \rightarrow \frac{v'' \cdot l''}{\upsilon''} = \frac{v' \cdot l'}{\upsilon'} = \frac{v \cdot l}{\upsilon}$$

Reynolds: $$Re = \frac{v \cdot l}{\upsilon} = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta}$$

5. hasonlósági kritérium: $$\mathbf{We} = \frac{\mathbf{C}}{\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}^2} \quad \textbf{Weber – szám}$$

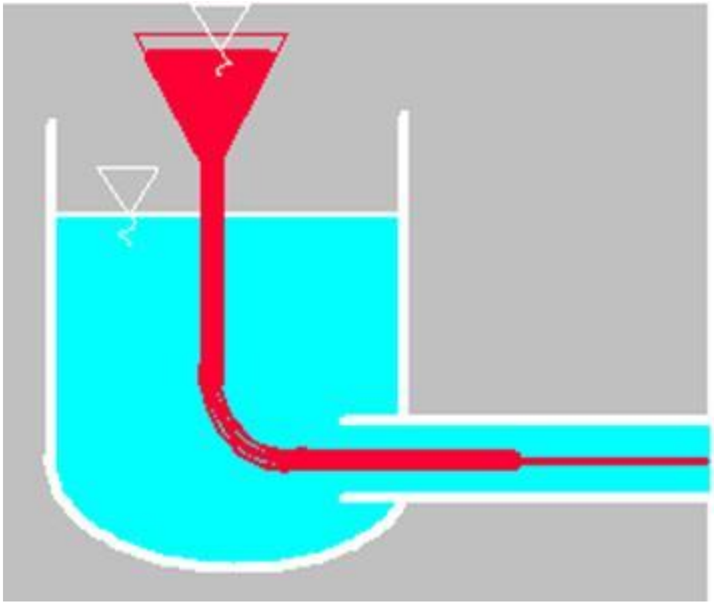
$$[C] = \frac{N}{m} \quad \text{felületi feszültség állandója}$$
$$[l] = [R] = m \quad \text{csepp sugara}$$

10.3. Áramlás jellege

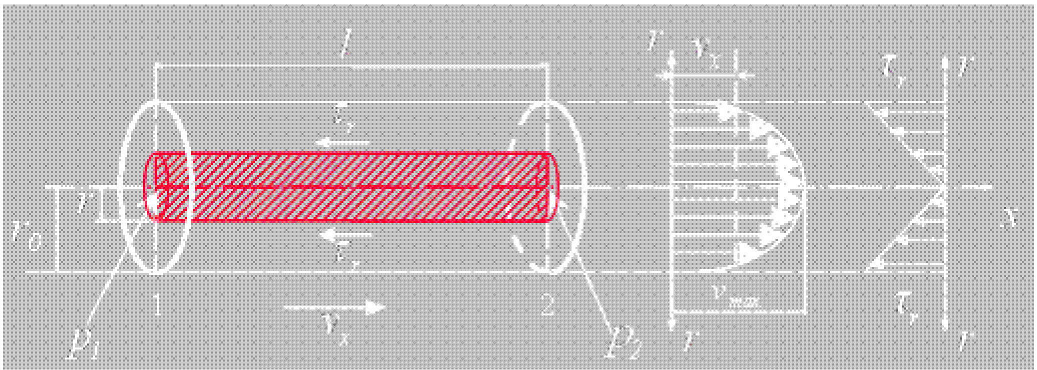
10.3.1. Lamináris áramlás

Tetszőleges folyadékelem sebességvektorának nagysága és iránya állandó.

Mindaddig, míg a tölcsérből kifolyó színes folyadék nem bomlik fel, párhuzamos marad, lamináris áramlásról beszélünk.



Határozzuk meg valóságos folyadékoknál, lamináris áramlást feltételezve, egy vízszintes csővezetékben létrejövő nyomásesést. A számításnál egy r sugarú folyadékhenger felületén létrejövő súrlódási ellenállás legyőzésére szükséges nyomást határozzuk meg.



A folyadékhenger áttolásához szükséges nyomóerő: $F_p = (p_1 - p_2) \cdot r^2 \cdot \pi$

A hengerfalon létrejövő nyíró erő: $F_\tau = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot l \cdot \tau_r$

$$(p_1 - p_2) \cdot r^2 \cdot \pi = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot l \cdot \tau_r$$

$$(p_1 - p_2) \cdot r^2 \cdot \pi = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot l \cdot \eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

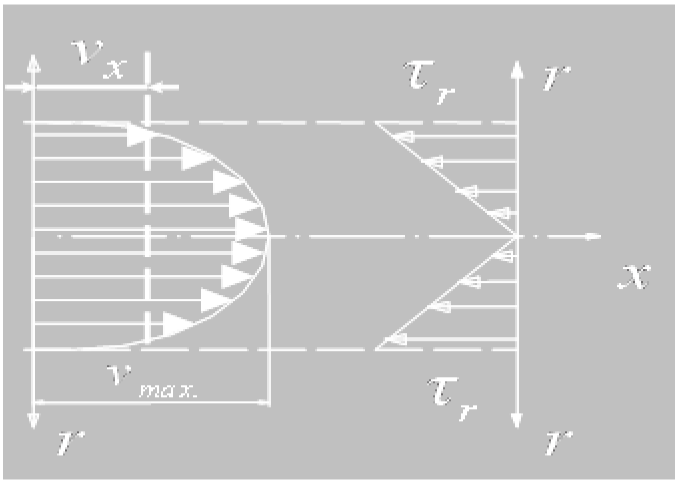
$$\Delta p \cdot r^2 \cdot \pi = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot l \cdot \eta \cdot \frac{dv_x}{dr}$$

$$\int_{v}^{v_0} dv_x = -\frac{\Delta p}{2 \cdot l \cdot \eta} \cdot \int_{r}^{r_0} r \cdot dr$$

Csúsztató- feszültség:

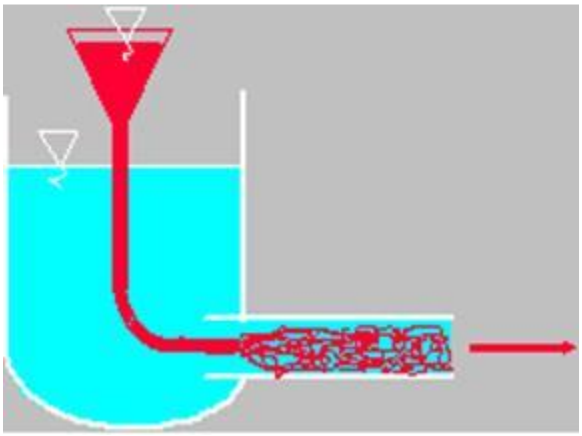
$$(p_2 - p_1) \cdot r^2 \cdot \pi = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot l \cdot \tau_r$$

$$\tau_r = -\frac{\Delta p}{2 \cdot l} \cdot r = -B \cdot r \quad \textbf{egyenes egyenlete}$$



10.3.2. Turbulens áramlás

Turbulens áramlásban a sebességvektor az átlagérték körül nagyság és irány szerint véletlenszerűen ingadozik. A vékony csövet elhagyva: örvénylő mozgást végez



10.3.3. Áramlás jellege és határréteg közötti kapcsolat

Az áramlás jellegét meghatározó hasonlósági kritérium a Re szám mely a konvektiv tömegerő és a súrlódási erő viszonyát írja le: $\left(Re = \frac{f_k}{f_s}\right)$

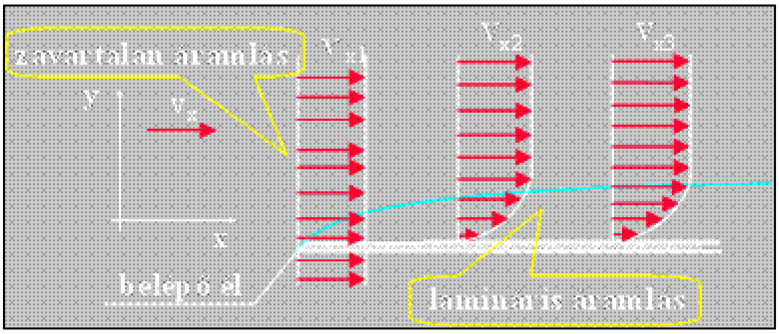
Modellkísérletekkel meghatározható a lamináris és turbulens áramlás határához tartozó Rejnolds szám értéke: $Re_{krit.}$.

$$\begin{array}{ccccc} Re & < & Re_{krit.} & < & Re \\ \text{lamináris} & \leftarrow & & \rightarrow & \text{turbulens} \\ & & \text{bizonytalan átmenet} & & \end{array}$$

Az Re értéke nagymértékben függ az áramlási környezettől:

- Sík fal mentén: $Re_{Krit.} \cong 5 \cdot 10^5$
- Csőben: $Re_{Krit.} = 2320$
- Gömb körüli áramlásakor: $Re_{Krit.} \cong 1$

A kísérleti tapasztalatok szerint a szilárd fallal érintkező részecskék a falhoz tapadnak, azaz sebességük zérusértékű.



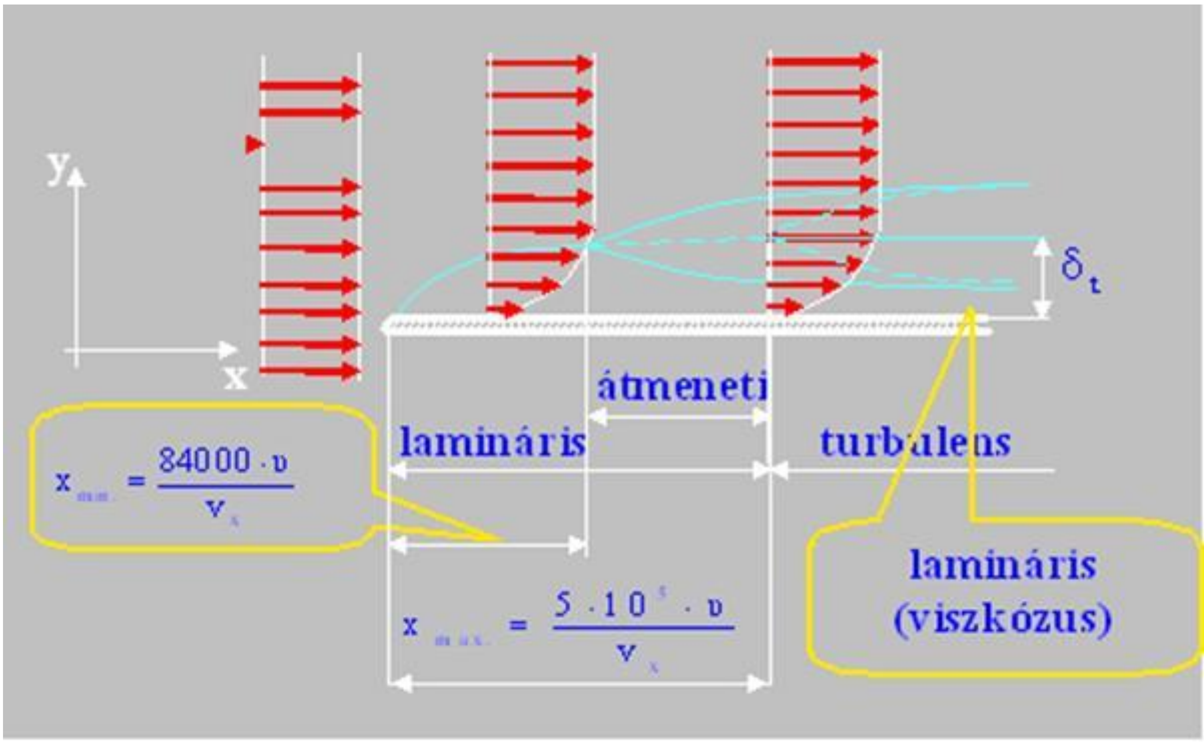
<u>Síklap határrétege:</u> Egy zavartalan áramlásba helyezett éles peremű síklap élétől az áramlás irányába lamináris határréteg alakul ki, melyben a sebességváltozás a lamináris áramlás szerint másodfokú parabola. A határréteg peremén a sebesség a zavartalan áramlás sebességével egyezik meg.

A határréteg vastagsága, a faltól mért távolság addig a pontig, ahol a sebesség eltérés csak 1%-kal kisebb a zavartalan áramlás sebességénél.)

Az áramlás irányában a lamináris (viszkozitásból adódó belső súrlódással fékezett) áramlással mozgó határréteg vastagsága fokozatosan nő. Sőt, nő a v_x sebesség értéke is, mivel a határréteg kisebb a sebességéből adódó térfogatáram csökkenést, a kontinuitás törvénye értelmében, csak egy növekvő határrétegen kívüli sebességgel lehet kiegyenlíteni.

A növekvő határréteg egyensúlya felbomlik, és a határréteg minőségi változást szenved. A lamináris áramlás turbulensé alakul, miközben a lamináris határréteg elvékonyodik.

Az átalakulás $84000 < Re = \frac{v \cdot x}{\upsilon} < 5 \cdot 10^5$ között bárhol a körülményektől függően kezdődhet. ($Re > 5 \cdot 10^5$ érték felett már nincs lamináris áramlás)



Kármán és Prandtl szerint a határréteg vastagsága ***x*** távolságban:

$$\delta_t = 0,37 \cdot x \cdot \frac{1}{Re_x^{1/5}} = 0,37 \cdot \frac{Re_x \cdot \upsilon}{v} \cdot (Re_x)^{-1/5}$$

$$Re_x = \frac{v \cdot x}{\upsilon} \rightarrow x = \frac{Re_x \cdot \upsilon}{v}$$

$$\delta_t = 0,37 \cdot \frac{\upsilon}{v} \cdot Re_x^{4/5}$$

A lamináris határréteg x_{max} távolságban történő felbomlásakor a határréteg vastagsága ha:

$$t = 20^\circ C, v = 10\frac{m}{s}, \upsilon = 10^{-6}\frac{m^2}{s}$$

$$\delta_t = 0,37 \cdot \frac{10^{-6}}{10} \cdot \left(5 \cdot 10^5\right)^{4/5} = 1,34 \cdot 10^{-3} m \quad \delta_t = 1,34 mm$$

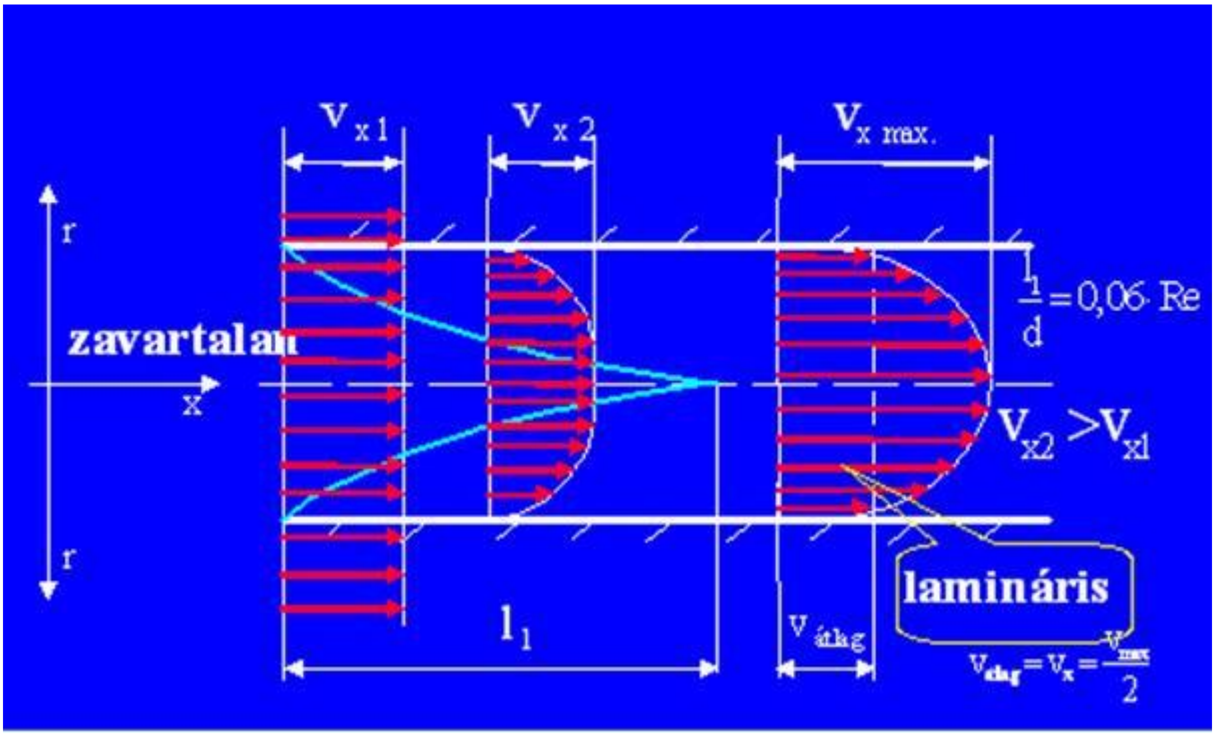
$$x_{max.} = \frac{Re \cdot \upsilon}{v} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-6}}{10} = 5 \cdot 10^{-2} = 50 mm$$

$$Re_{Krit.}$$

Természetesen a Re $_{krit}$ értékig az áramlás mindvégig lamináris lesz.

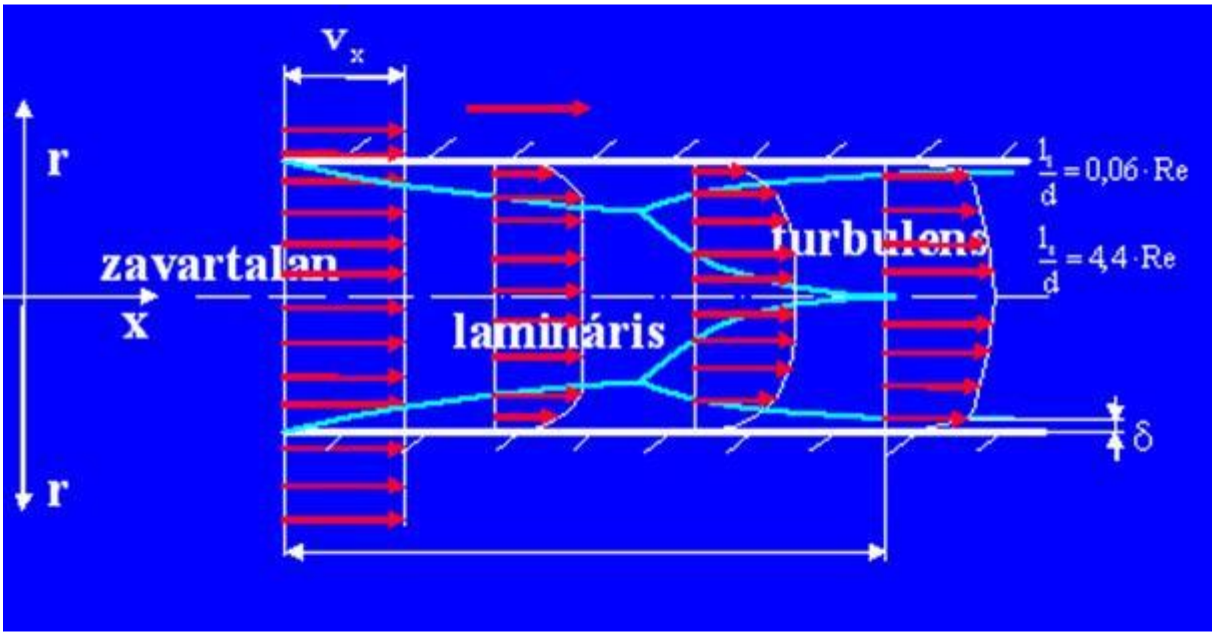
<u>Csővezeték határrétege.</u>

Zavartalan áramlással mozgó közeg a belépő él után - a síkfal áramlásához hasonlóan - lamináris áramlással mozog. A koncentrikus körben azonos sebességgel mozgó folyadék lamináris határrétege folyamatosan nő.



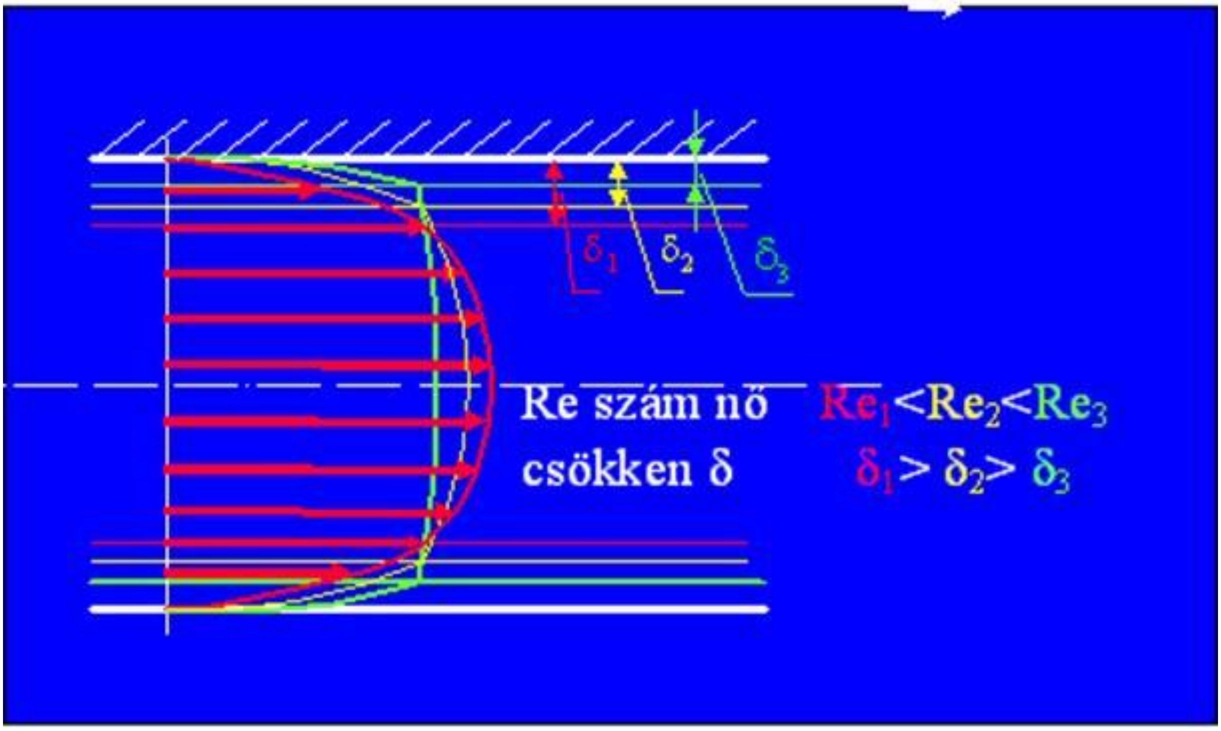
Ha a növekvő lamináris határréteg a cső tengelyében összezáródik, nem tud a turbulens áramlás kialakulni.

Ha a lamináris határréteg felbomlása az összezáródás előtt következik be, - a síklap menti áramláshoz hasonlóan - a lamináris határréteg rohamosan csökken, és a turbulens határréteg záródik a cső tengelyében.



Megjegyzés: Ipari és ellátási gyakorlatban a csővezetékek alkalmazásának nagy szerepe van, ezért az alkalmazás feltételeivel foglalkozni kell.

Re szám hatása a sebességprofilra



A sebességprofira a Re szám ad magyarázatot.

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta}$$

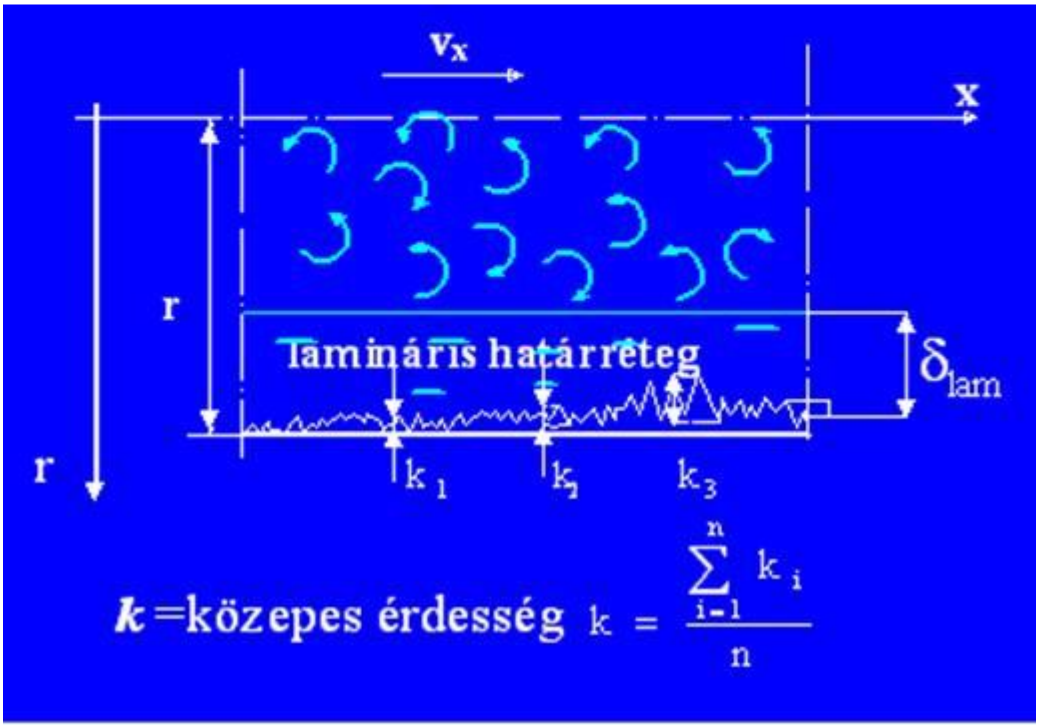
Alkalmazzuk l helyett a csővezetékek áramlástanilag jellemző átmérőjét.

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}$$

Azonos térfogatáramok esetén, de eltérő viszkozitásoknál eltérő Re számok alakulnak ki. Nagyobb Re számoknál a lamináris határréteg vastagsága csökken, így azonos átlagsebesség kialakulásához a sebességprofil kevésbé görbült.

10.3.4. Csővezetékek osztályozása

Az osztályozás határréteg és érdesség viszonyán alapszik



- Hidraulikailag sima $k << \delta$
- Átmeneti tartomány $k \leq \delta/4$
- Hidraulikailag érdes csõ $k > \delta/4$

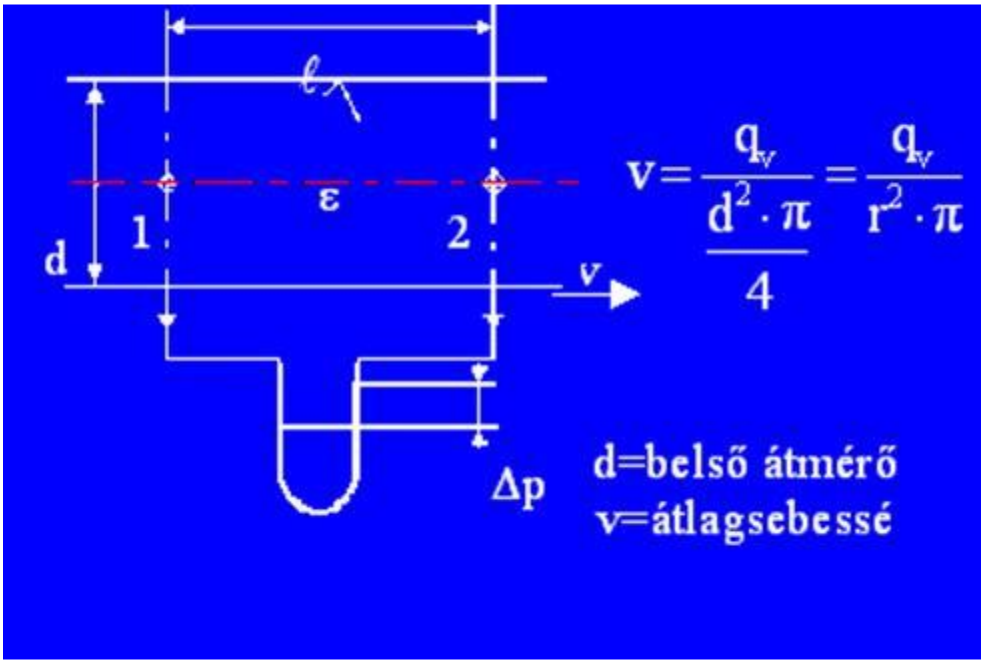
Mivel a határréteg függ Re számtól $\left(\delta = f\left(Re\right)\right)$, a Re szám, pedig a viszkozitástól is függ $\left(Re = \frac{v \cdot d}{\upsilon} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}\right)$, különböző viszkozitású cső lehet hidraulikailag sima vagy érdes.

Érdességet:

- relatív érdességgel $\varepsilon = \frac{k}{r}$, vagy a $Re = \frac{v \cdot d}{\upsilon} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}$
- relatív érdesség reciprokával $\frac{r}{k}$ vesszük figyelembe. $Re = \frac{v \cdot d}{\upsilon} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}$

10.4. Egyfázisú áramlás csövekben

A vizsgálat feltétele hogy, az áramlás stacionárius legyen és a cső teljes keresztmetszetét ki töltse.



Felhasznált hasonlósági kritériumok

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \frac{v^2}{2}}$$ ➔ f_k és f_p erők viszonyát írja le

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$ ➔ f_k és f_s erők viszonyát írja le

A felhasznált kritériális egyenlet:

$Eu = f(Re, \frac{\ell}{d}, \varepsilon)$ ahol $\frac{\ell}{d}$ és a relatív érdesség geometriai hasonlóság.

Körkeresztmetszetű csöveknél a kritériális egyenlet tovább pontosítható:

$Eu = f\left(Re, \varepsilon\right)\frac{\ell}{d}$ ahol, $\lambda = f\left(Re, \varepsilon\right)$ a csősúrlódási tényező, így az egyenlet $Eu = \lambda \frac{\ell}{d} = \frac{\Delta p}{\rho \frac{v^2}{2}}$ alakú lesz.

Tehát a nyomásveszteség számítására alkalmas kritériális egyenlet: $\boxed{\Delta p_v = \lambda \frac{\ell}{d} \rho \frac{v^2}{2}}$

A csősúrlódási tényező meghatározása (λ =f(Re, ε)) függ a

- *Re* számtól

- Csőérdességtől

10.4.1. Fizikailag sima csövek

Fizikailag (szerkezetileg) sima csövek: a feltétele $k \ll \delta, \quad \varepsilon \cong 0$

1. Lamináris áramlás esetén

Re<Rekrit = 2320 $\boxed{\lambda = \frac{64}{Re}}$

$$\Delta p = \frac{64}{Re} \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{32 \cdot \upsilon}{d} \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \rho \cdot v^2$$

Behelyettesítve: $$\Delta p_{hm.} = 32 \frac{\upsilon \cdot \rho \cdot \ell \cdot v}{d^2} = 32 \frac{\eta \cdot \ell \cdot v}{d^2}$$

Megoldásként a már ismert és más úton meghatározott *Hagen – Poiseuille* egyenletet kapjuk.

2. Turbulens áramlás

2.1 Blasius formula

érvényes *2320 < Re < 10* ^{5} tartományban $\boxed{\lambda = 0,3164 \frac{1}{\sqrt[4]{Re}}}$

2,2 Nikuradse összefüggés

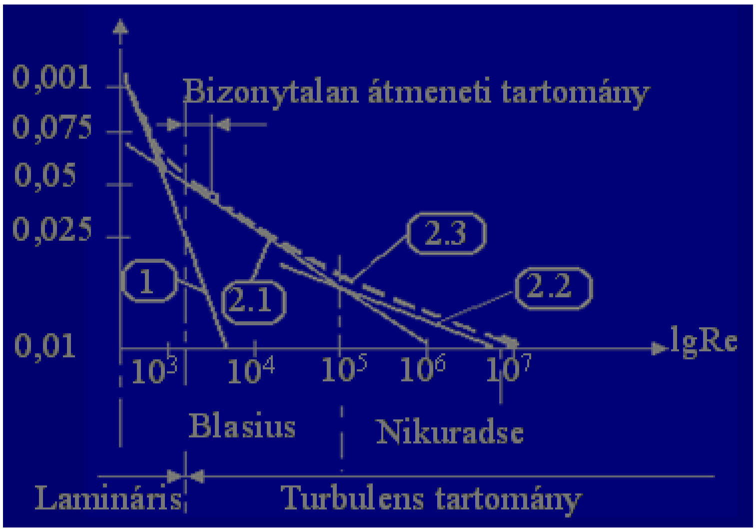
érvényes *10* ^{5} *< Re < 5 · 10* ^{5} tartományban $\boxed{\lambda = 0,0032 + 0,221 \cdot Re^{-0,237}}$

2.3 Prandtl - Kármán képlete

érvényes *2320 < Re esetben* $\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \left(2 \cdot \lg Re \sqrt{\lambda}\right) - 0,8}$

1. a2.1 és a2.2 függvények tartományára is érvényes

Implicit függvény, csak iterációval oldható meg.



10.4.2. Érdes csövek

Három szakaszra bonthatók:

<u>1.Szakasz: Hidraulikusan sima csövek</u>

λ értékek a hidraulikailag simával egyeznek $\lambda=f(Re,\varepsilon)$

- laminális áramlásnál Re<2320 (1. függvény)
- turbulens áramlásnál $2320<Re<10^{5}$

  Blasius-képlet: $10^{5}<Re<5\cdot 10^{6}$ (2.1 függvény)

  Nikuradse: $\lambda=0{,}0032+0{,}221\cdot Re^{-0{,}237}$ (2.2 függvény)

Feltétel: $\delta \gg k$ ezért $\varepsilon \approx 0$, ami hatásában megfelel a fizikailag sima csövek feltételének, azaz $\lambda=f(Re)$

Ha k csökken δ is csökkenhet, és mivel $\delta=f(Re)$ a simább (kisebb k érdességű) csövek nagyobb *Re* számig tekinthetők hidraulikusan simának. Hidraulikusan simának tekinthetők a csövek $Re \le 200\frac{r}{k}$ számig

<u>2.Szakasz:</u> λ függ az *Re* és a relatív érdesség értéktől is $\lambda=f(Re,\varepsilon)$

Prandl- Colebrook képlet:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}+\frac{k}{d}0{,}269\right)}$$

A tartomány értékei $200\frac{r}{k}\le Re\le 2000\frac{r}{k}$ tartományban találhatók.

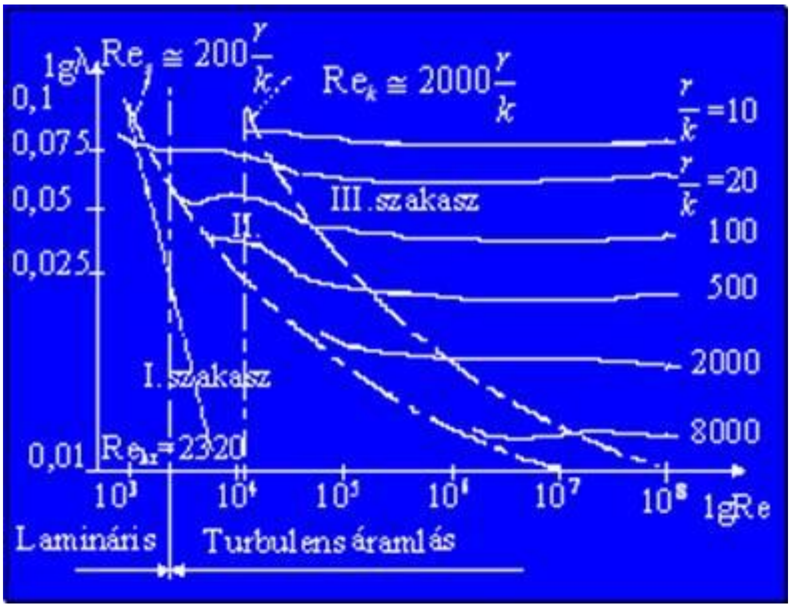
<u>3.Szakasz:</u> λ csak a relatív érdességtől függ $\lambda=f(\varepsilon)$

$k_{\text{áthg}}$ □ $\frac{\delta}{4}$ így az egyes egyenetlenségek nagyobbak a határréteg vastagságánál.

A határgörbe értékei: $2000\frac{r}{k} < Re$ értékeknél találhatók. Csősúrlódás számítási függvénye a *Nicuradse* összefüggés.

Nikuradse képlete: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg\frac{r}{k} + 1{,}74}$

Az összefüggések ábrázolása **Moody - diagramban** (1944)



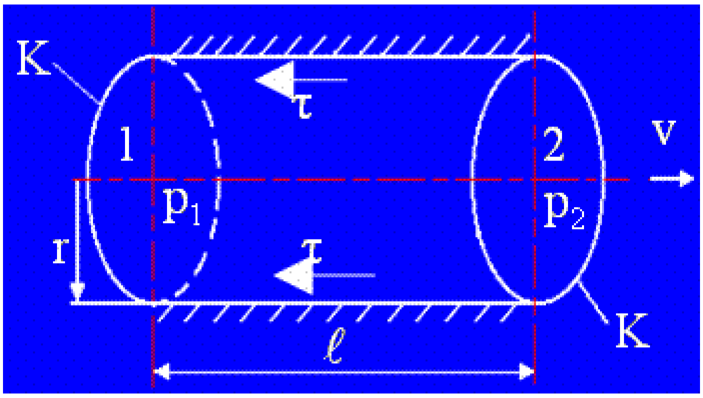
10.4.3. Nem kör keresztmetszetű csövek súrlódási ellenállása

Veszteségek a csőfal menti határrétegekben vannak. Az áramló folyadék a K kerületű, és l hosszúságú fallal érintkezve, a τ csúsztató feszültség hatására súrlódó erőt hoz létre.

Ahol *K* = nedvesített kerület *l* = csőszakasz hossza és *τ* = csúsztató feszültség.

Súrlódó erő: $F_s = \ell \cdot K \cdot \tau$

A súrlódó erőt a keresztmetszetre ható nyomóerővel tudjuk legyőzni.



$$F_s = F_p$$
$$\ell \cdot K \cdot \tau = A \cdot \Delta p$$
$$\ell \cdot 2r\pi \cdot \tau = r^2\pi \cdot \Delta p$$
$$\tau = \frac{r}{2\ell}\Delta p = \frac{r}{2\ell}\lambda\frac{\ell}{d}\rho\frac{v^2}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{2\ell}\lambda\frac{\ell}{d}\rho\frac{v^2}{2}$$
$$\tau = \frac{\lambda}{4}\rho\frac{v^2}{2}$$

A kapott csúsztató feszültséget visszahelyettesítjük az erőegyensúlyi összegfügésbe

$$F_p = F_s$$
$$A \cdot \Delta p = \ell \cdot K \cdot \tau$$
$$A \cdot \Delta p = \ell \cdot K \frac{\lambda}{4}\rho\frac{v^2}{2}$$
$$\Delta p = \lambda \cdot \ell \frac{K}{4A}\rho\frac{v^2}{2} = \lambda\frac{\ell}{\frac{4A}{K}}\rho\frac{v^2}{2} = \lambda\frac{\ell}{d_e}\rho\frac{v^2}{2}$$

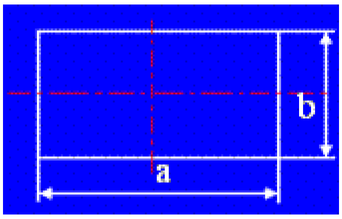
Az egyenlet alapján a **hidraulikai átmérő**= **egyenértékű csőátmérő** a négyszeres keresztmetszet és nedvesített kerület hányadosa $\boxed{d_e = \frac{4A}{K}}$

Hidraulikai sugár: $\boxed{r' = \frac{A}{K}}$

$\boxed{d_e = 4r'}$

Példák:

1. Határozzuk meg az a · b keresztmetszetű téglalap egyenértékű átmérőjét



Hidraulikai sugár : $r' = \frac{A}{K} = \frac{ab}{2(a+b)}$

Hidraulikai vagy egyenértékű csőátmérő:

$$d_e = \frac{4A}{K} = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

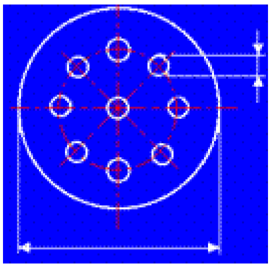
Ha $a >> b$ akkor elfogadhatjuk, hogy $a + b \approx a$, így az egyenértékű átmérő:

$$d_e = \frac{2ab}{a} = 2b$$

A Re szám és a súrlódási ellenállás d_e átmérővel

$$Re = \frac{d_e v}{\upsilon}; \qquad \Delta p = \lambda \frac{\ell}{d_e} \rho \frac{v^2}{2}$$

2. Határozzuk meg a hőcserélő d_e átmérőjét:



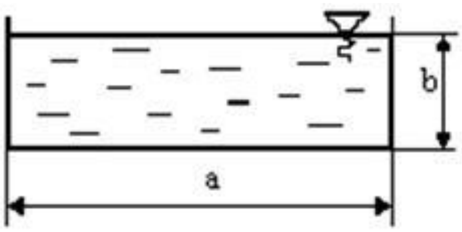
n = csőszám

$$d_e = \frac{4A}{K} = \frac{4\left(\frac{D^2 \cdot \pi}{4} - n\frac{d^2 \cdot \pi}{4}\right)}{D \cdot \pi + n \cdot d \cdot \pi}$$

$$d_e = \frac{4\frac{\pi}{4}\left(D^2 - n \cdot d^2\right)}{\pi\left(D + n \cdot d\right)}$$

$$d_e = \frac{D^2 - n \cdot d^2}{D + n \cdot d} \qquad Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \qquad \mathbf{\Delta p = \lambda \frac{\ell}{d_e} \rho \frac{v^2}{2}}$$

3. Határozzuk meg a nyitott csatorna egyenértékű csőátmérőjét.



$$d_e = \frac{4A}{K} = \frac{4ab}{a+2b}$$

$$\Delta p_{min} = \lambda \frac{\ell}{d_{emax}} \rho \frac{v^2}{2}$$

A minimális veszteségi nyomást a legnagyobb egyenértékű átmérővel határozhatjuk meg.

Szélsőérték maximumkereséssel a K minimumával lehetséges. $d_e = d_{emax} = \frac{4A}{K_{min}}$

$$K = a + 2b$$

$$A = ab \qquad a = \frac{A}{b}$$

$$K = \frac{A}{b} + 2b$$

$$\frac{dK}{db} = \frac{d\left(A \cdot b^{-1} + 2b\right)}{db}$$

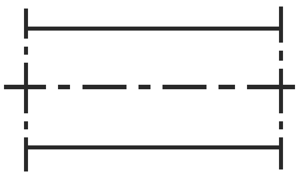
$$\frac{dK}{db} = -\frac{A}{b^2} + 2 = 0$$

$$\frac{A}{b^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{ab}{b^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)_{opt} = 2$$

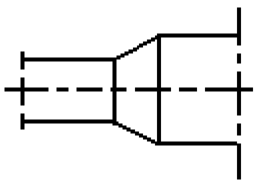
10.4.4. Csőidomok és szerelvények ellenállása

Csővezetékeket az alábbi elemek alkothatják:

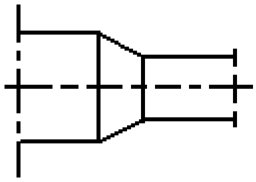
– egyenes szakaszok



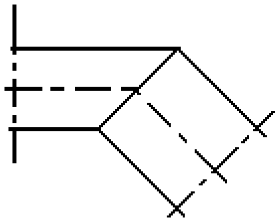
– bővítések (diffúzor)



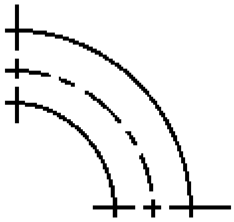
– szűkítések (konfúzor)



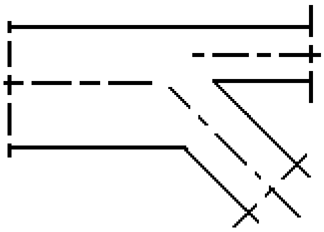
– könyökök



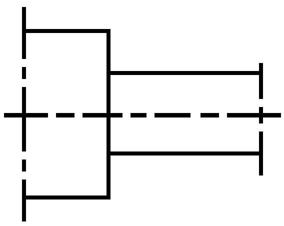
– ívek



– elágazások



– hirtelen keresztmetszet szűkülés



Szerelvények:

– csapok

– szelepek

– tolózárak

– szűrők.

Összetett elemek esetén az áramlási jelenségek bonyolultak, a veszteségeinek leírására helyettesítő veszteségtényező kerül bevezetésre.

Nyomásveszteség meghatározását $\Delta p_v = \zeta \frac{v^2}{2} \rho$ összefüggéssel végezhetjük

Δp_v sebességfüggő, ezért meg kell adni, hogy a sebesség a melyik keresztmetszet vonatkozik

Példa: 1.Konfuzor

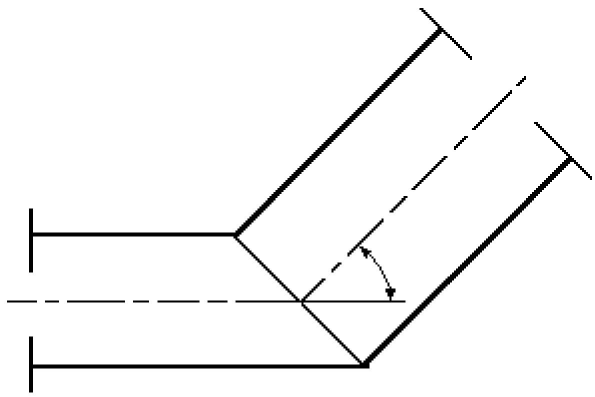
2.Diffuzor

3.Könyök

ζ megadása táblázatban, diagramban vagy mindkettőben

Könyök veszteségtényezőjének megadása táblázattal.

$$\Delta p_v = \zeta_k \frac{v^2}{2} \rho$$



α	15°	22,5°	30°	45°	60°	20°
ζ	**0,04-0,06**	**0,07-0,15**	**0,1-0,2**	**0,2-0,3**	**0,40-0,70**	**1,10-1,40**

10.5. Egyenértékű csőhossz

Összetett csővezeték esetén a számítás egyszerűsítése véget szükség lehet egy olyan egyenes csőszakasz meghatározására, melynek ellenállása megegyezik a csővezeték ellenállásával.

Veszteség összetevői:

- egyenes csőszakasz nyomásveszteségei
- ívek, elzárók, szűkítők stb…nyomásveszteségei

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2}\left(\lambda_1 \frac{\ell_1}{d_1} v_1^2 + \lambda_2 \frac{\ell_2}{d_2} v_2^2 + \ldots + \lambda_n \frac{\ell_n}{d_n} v_n^n\right) + \frac{\rho}{2}\left(\zeta_1 \cdot v_1^2 + \zeta_2 \cdot v_2^2 + \ldots + \zeta_m \cdot v_m^2\right)$$

A csővezeték ellenállása egyenlő az egyenértékű cső ellenállásával.

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\ell_i}{d_i} v_i + \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \cdot v_i^2\right) = \frac{\rho}{2} \lambda \frac{\ell_{ev}}{d} v^2$$
rendezve az egyenértékű csőhossz

$$\ell_{ev} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \ell_i \frac{d}{d_i} \left(\frac{v_i}{v}\right)^2 + \frac{d}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{v_i}{v}\right)^2$$

Alkalmazása d=áll . csővezetékek esetén célszerű

$d=d_i$; $\lambda=\lambda_i$; $v=v_i$;

$$\ell_{ev} = \sum_{i=1}^{n} \ell_i + \frac{d}{\lambda} \sum_{i=1}^{m} \zeta_i$$

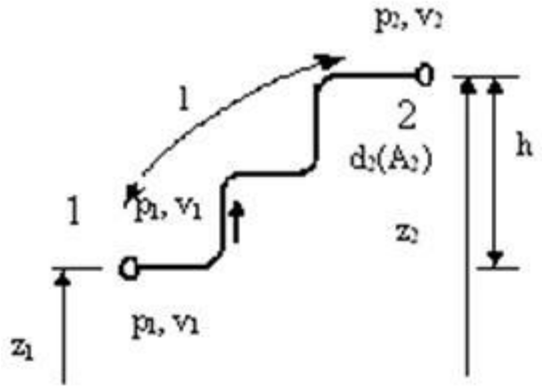
ℓ_{ev} segítségével számított veszteség

$$\Delta p_v = \lambda \frac{\ell_{ev}}{d} \rho \frac{v^2}{2}$$

$$v = \frac{q_v}{A}$$

$$\Delta p_v = \underbrace{\frac{1}{2} \lambda \frac{\ell_{ev}}{d} \rho \frac{1}{A^2}}_{\text{állandó}} q_v^2 \;\; =>$$

10.6. Csővezetékek jelleggörbéje



Bernoulli egyenlet súrlódási veszteség figyelembevételével az 1 és 2 pontok között.

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2 + \Delta p_v$$

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_1 \le p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2 + \Delta p_v$$ nem jön létre szállítás.

Szállítás feltétele a nyomásnövelés, pl:szivattyúval

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_1 + \Delta p_ö = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho \cdot z_2 + \Delta p_v$$

Szivattyú össznyomása

$$\Delta p_ö = (p_2 - p_1) + \rho \cdot g(z_2 - z_1) + \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \Delta p_v$$

A sebességeket fejezzük ki a térfogatáramokkal: $v_i = \frac{q_v}{A_i}$

Dinamikus nyomás a térfogatáramokkal:

$$\Delta p_d = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{q_v^2}{A_2^2} - \frac{q_v^2}{A_1^2}\right) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)q_v^2$$ behelyettesítve a $\Delta p_ö$-be

$$\Delta p_ö = (p_2 - p_1) + \rho \cdot g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)q_v^2 + \Delta p_v$$

Alaki ellenállások nyomásvesztesége:

$$\Delta p_v' = \sum_{i=1}^{m} \Delta p_{vi}' = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i \cdot \rho \frac{v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\rho \cdot q_v^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\zeta_i}{A_i^2}$$

Egyenes csövek súrlódási vesztesége:

$$\Delta p''_v = \sum_{i=1}^{n} \Delta p''_{vi} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\ell_i}{d_i} \rho \frac{v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \cdot q_v^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i \frac{\ell_i}{d_i}}{A_i^2}$$

Az összes veszteség:

$$\Delta p_v = \sum_{i=1}^{n} \Delta p'_{vi} + \sum_{i=1}^{m} \Delta p''_{vi} = \frac{1}{2} \rho \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\zeta_i}{A_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i \frac{\ell_i}{d_i}}{A_i^2} \right) q_v^2$$

$$\Delta p_ö = (p_2 - p_1) + \rho \cdot g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\zeta_i}{A_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i \frac{\ell_i}{d_i}}{A_i^2} \right) q_v^2$$

A kapott egyenlet egy eltolt parabola egyenlete

Ahol $a = (p_2 - p_1) + \rho \cdot g(z_2 - z_1)$ és

$$b = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\zeta_i}{A_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i \frac{\ell_i}{d_i}}{A_i^2} \right)$$

$$\Delta p_ö = a + b q_v^2$$

v=0, q_v=0 esetben a hidrosztatikus és statikus nyomás:

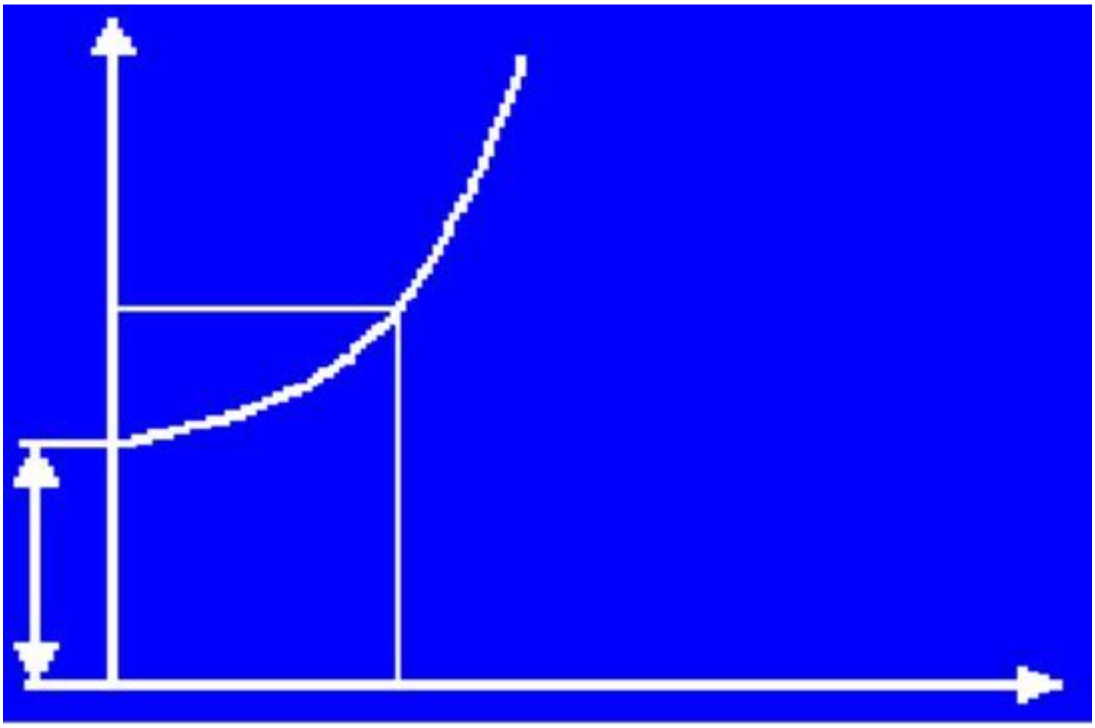
$$\Delta p_ö = a = (p_2 - p_1) + \rho \cdot g(z_2 - z_1)$$

Ha a szállítás p_1=p_0 helyről a p_2=p_0 helyre történik, csak hidrosztatikus nyomás van.

$$a = \rho \cdot g(z_2 - z_1) = \rho \cdot g \cdot h$$

Ha nincs szállítás, v=0, q_v=0 $\Delta p_{ö0}$=a= ρ · ·g · ·h

Az ábra szemléletesen mutatja a különböző üzemállapotokat.



A jegyzet elektronikus változata a Phare ERFP-DD2002-HU-B-01 project 9.modul keretében készült.